Tamás Ferenc: Vektoralgebra

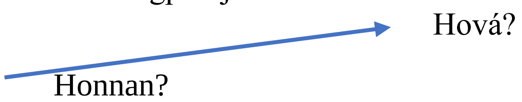
Ez az írás a 10. osztályos hagyományos tanmenet szerinti matematika anyag kiegészítéseként, illetve annak egy más megfogalmazásául készült. Az anyag egésze oktatási céllal szabadon felhasználható és terjeszthető, de annak lemásolása, illetve máshol felhasználása az eredeti szerző írásbeli engedélyéhez kötött.

Részek:
- Vektor fogalma
- Vektorok geometriai ábrázolása
- Vektorok megadása koordinátákkal
- Vektorok összeadása
- Vektorok kivonása
- Vektor szorzása valós számmal
- Alapvető vektorműveletek áttekintése
- Bázisvektorok, egységvektorok
- Műveletek egységvektorokkal
- Vektorok skaláris szorzata
- Vektorok vektoriális szorzata

A dokumentumban található ábrák a saját gépemen található legális MS 365 alkalmazással, illetve az ingyenes www.Geogebra.org oldallal készültek.

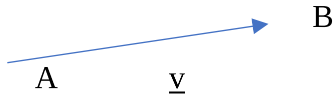
Vektor fogalma

A klasszikus megfogalmazás szerint **a vektor egy irányított szakasz**, melynek jellemzője az iránya és nagysága. Jelen dokumentum csak a síkbeli vektorokkal foglalkozik, melyek jellemzője alapvetően a kezdő- és a végpontja.



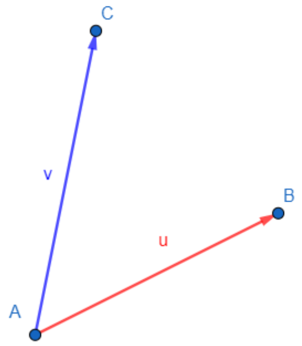
A fenti ábrán látható egy vektor, melyet legegyszerűbben úgy tudunk megadni, hogy felelünk a honnan és hová kérdésekre. Például az A pontból B pontba mutató vektort a következő jelekkel írhatjuk le:

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ vagy $\underline{\mathbf{v}}$.



Vegyük észre, hogy a kétfajta írásmód ugyanazt jelenti. Az első verzióban megadjuk a kiindulási és a végpontot (ezek itt: A és B). A betűpáros attól válik vektorrá, hogy egy apró vektor-jelet, azaz egy kis nyilat húzunk fölé. Ez a kezdőpontból a végpontba mutat. Az általános olvasási szokásoknak megfelelően balról jobbra szokott mutatni.
A másik leírási mód a sima aláhúzott módszer. Ilyenkor csak a vektor kisbetűs jelét használjuk és simán aláhúzzuk, vektorjel nélkül.
A két módszer közül nincs privilegizált, mindkettőt lehet használni.

Vektorok geometriai ábrázolása



Máz az előbb is láthattuk a legegyszerűbb ábrázolásokat.
Erre látható egy egyszerű minta a jobb oldalon:
Az A és B pontok között van az $\underline{u}$ vektor (piros színnel), míg az A és C pontok között van a $\underline{v}$ vektor (kék színnel).

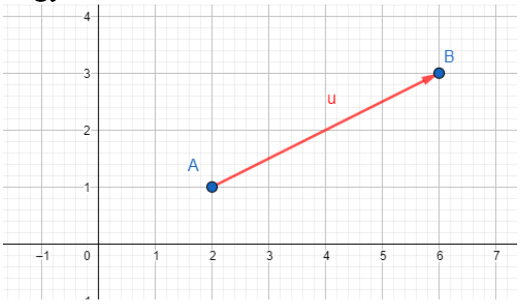
Precíz megfogalmazás szerint:

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, illetve $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

Van egy különlegesség is, a nullvektor. Ennek a különlegességnek a hossza nulla, iránya pedig tetszőleges! Írásmódja: $\underline{0}$.

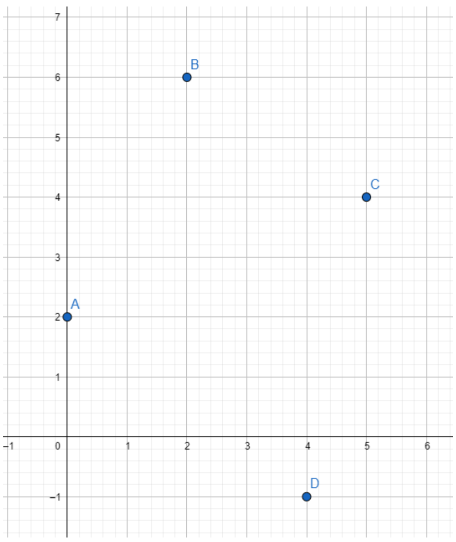
Vektorok megadása koordinátákkal

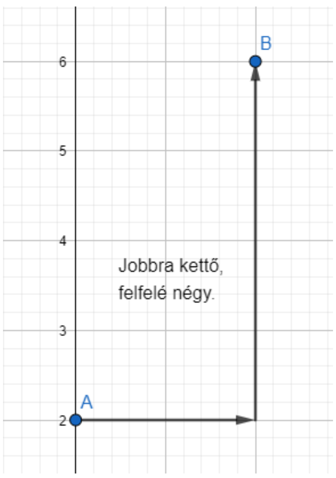
Ha a vektor-műveletekre koordinátákat használunk, akkor két különféle módszert is használhatunk. Az egyik, kevésbé elterjedt módszer szerint megadjuk a kezdő és végpontot. Ez gyakorlatilag ugyanaz, mint a geometriai módszer.
A másik megadás szerint megadjuk a vektor kezdőpontját és az irányát. Ebben a módszerben nagyon sokszor a koordinátarendszer kezdőpontja, az origó a kezdőpont.



Az előző ábrát használva a kiindulópont koordinátái: A(2;1), a végponté pedig: B(6;3).
Így a két pont által meghatározott vektor a következő: A(2;1)-ből mutat B(6;3)-ba.
Ez első látásra bonyolult. Ezért érdemes a második módszert használni, amely szerint az $\underline{u}$ vektor az A pontból mutat a (4;2)-es irányba, azaz a B pontba. Még egyszerűbb írásmóddal: $\underline{u}$(4;2).

Gyakorlásképpen írjuk fel az alábbi négy pontból képezhető összes vektort:
A(0;2)   B(2;6)   C(5;4)   D(4;-1)





Némi segítség a megoldáshoz az $\overrightarrow{AB}$ vektor esetén:

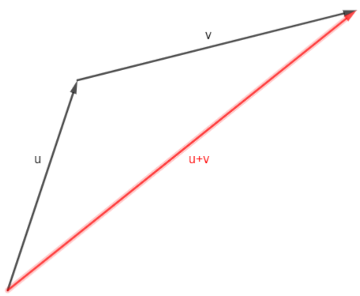
Az A pontból először menjünk jobbra kettőt, majd felfelé négyet. Így elérünk a B pontba. Tehát az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: (2;4).

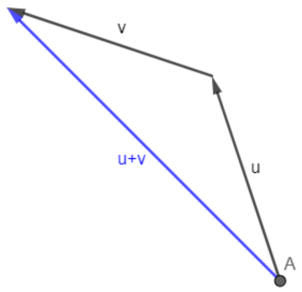
A többi megoldás: $\overrightarrow{AC}(5;2)$, $\overrightarrow{AD}(4;-3)$, $\overrightarrow{BC}(3;-2)$, $\overrightarrow{BD}(2;-7)$, $\overrightarrow{CD}(-1;-5)$.

Vektorok összeadása

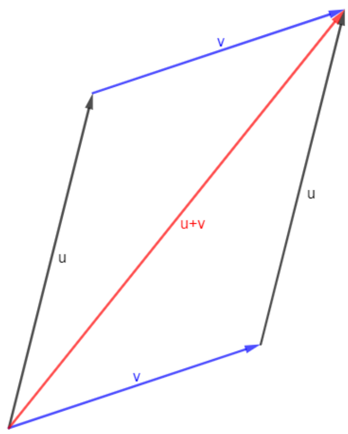
A vektorokat nem csupán megadni szeretnénk, hanem műveleteket is végezni vele. Ezek között a legegyszerűbb az összeadás. Geometriai értelemben ezt akkor a legegyszerűbb elvégezni, ha az egyik vektor végéből indul a másik vektor.

Így a két vektor összege az első vektor elejétől mutat a második vektor végéig. Másképpen:

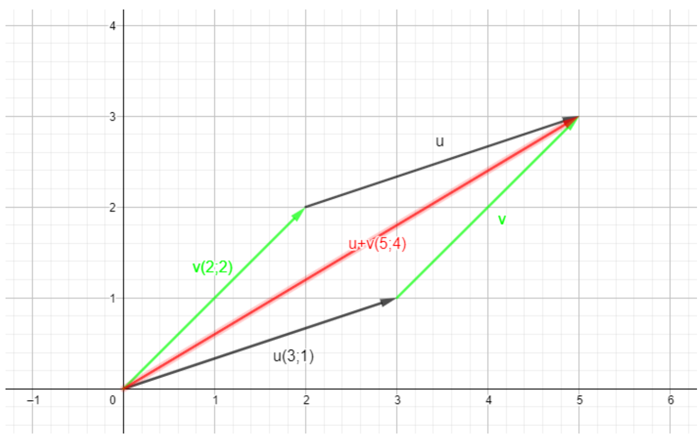




Ha viszont a két vektor közös kezdőpontból indul, akkor kicsit módosítani kell az ábrát. Ilyen esetben a két vektorból egy paralelogrammát kell készítenünk, melynek az átlója lesz a két vektor összege. (A lenti képen piros színnel ábrázolva.)
Technikailag ezt úgy lehet megvalósítani, hogy a közös kezdőpontból húzzuk meg az összeg-vektor a közös végpontig.



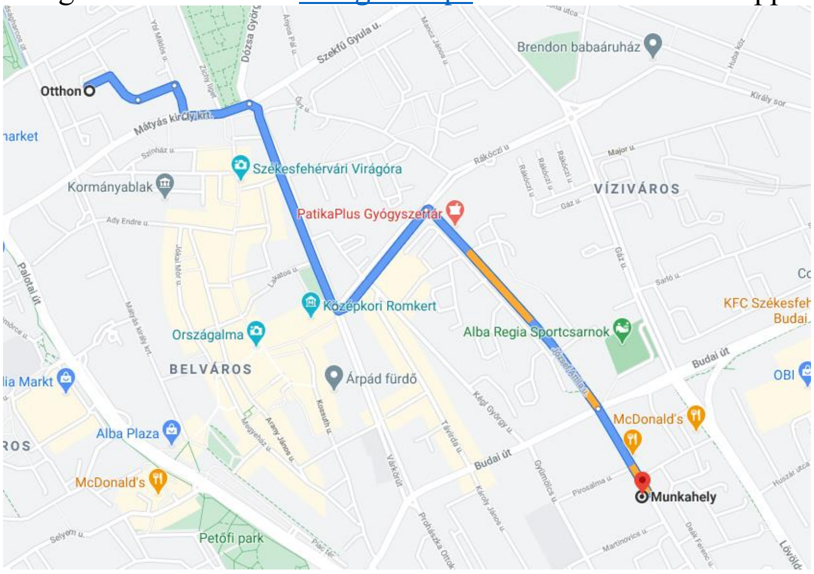
Nézzük ugyanezt koordinátákkal!
Adott két vektor: $\underline{u}(3;1)$ és $\underline{v}(2;2)$.
Egyszerű szerkesztéssel látható, hogy a két vektor összege merre lesz. Most számolással adjuk össze a megfelelő koordinátákat, így: $\underline{u}+\underline{v}(3+1;1+2)$, azaz $\underline{u}+\underline{v}(4;3)$.



Gyakorlásképpen nézzünk pár újabb összeadást a következő vektorokkal:
a(3;2) b(-1;4) c(0;-3) d(-2;-5)

A kérdések: a+b = ?, a+c = ?, a+d = ?, b+c =?, b+d =?, c+d =?.

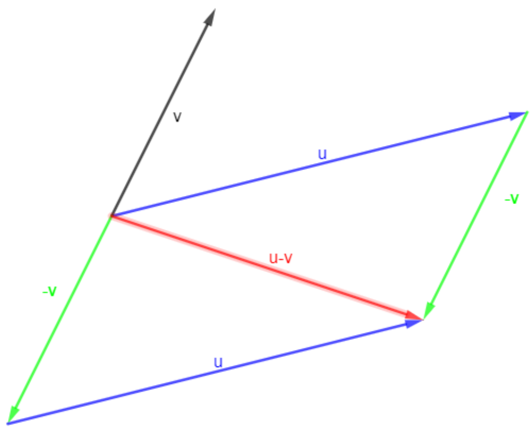
Kérdés: mi ennek a gyakorlati használata? Vegyük az egyik legnépszerűbb programot, a navigálásra is használt Google Maps alkalmazást. Mintaképpen összeállítottam egy útvonalat:



Itt látható, hogy mikor merre kell fordulni és mennyit kell menni az adott irányba. A hagyományos vektoros ábrából csak a vektorok végén lévő nyilak hiányoznak.

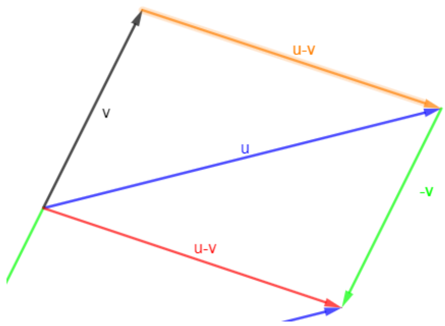
Vektorok különbsége

A megfelelő összeadás után a második alapvető műveletet, a különbséget is ki kell számolni, illetve le kell tudni rajzolni. Erre van a következő ábra:

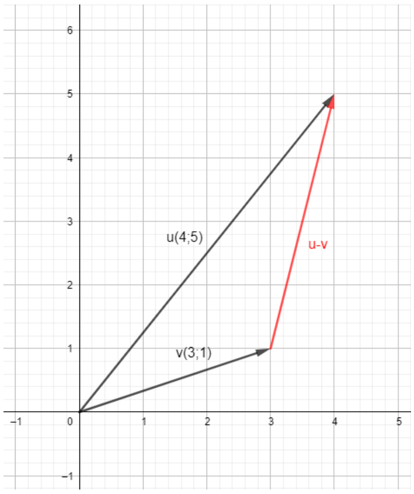


Adott a két eredeti vektor, az u és v. (kék és fekete) A különbséget leginkább úgy megjeleníteni, hogy vesszük a v vektor ellentettjét (zöld színnel); majd az eredeti u-hoz hozzáadjuk a már ismert paralelogramma szabállyal. Ez lesz a piros színű u+v vektor.

Zavaros kicsit?! Vegyünk egy egyszerűbb megoldást: A kivont vektor végéből húzzuk a különbségvektort a kisebbítendő végébe. Avagy: az u végéből a v végébe húzzuk a vektort. (narancssárga színű)



A dolog jóval egyszerűbb, ha mindezt koordinátákkal szeretnénk kiszámolni.
Legyen adott a következő két vektor: u(4;5) és v(3;1).
Ha egyszerűen kivonjuk egymásból a megfelelő koordinátákat, akkor a különbség a következő lesz:
u-v(4-3;5-1), azaz u-v(1;4).



Gyakorlásképpen nézzünk pár újabb kivonást a már ismert vektorokkal:
a(3;2) b(-1;4) c(0;-3) d(-2;-5)

A kérdések:
a-b = ?, a-c = ?, a-d = ?, b-c =?, b-d =?, c-d =?.

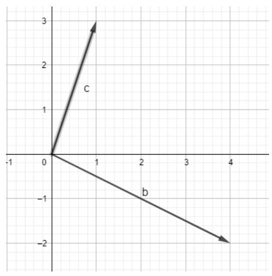
Vektor szorzása valós számmal

Ez megint csak egy látszólag nehéz téma. De miért kell kihangsúlyozni, hogy mivel is szorzunk?! Nos, jelen fázisban még csak valós számmal szorzunk, de hamarosan más is lesz… Nézzünk egy egyszerű geometriai példát:

Itt egy sima vektor háromszorosa látható, azaz a vektort szimplán egymás után rajzoljuk háromszor. A jelzése is igen egyszerű: 3*u = 3u.

A félreértések elkerülése végett nem árt tisztázni, hogy nem csupán pozitív egész számmal lehet szorozni (, mint ahogy azt sokan hiszik), hanem bármely valós számmal. Közte törtekkel, negatív számmal, sőt 0-val is.
Számtanilag ezt szintén igen egyszerű kiszámolni. Legyen adott a következő vektor: a(3;-1).
Vegyük ennek a kétszeresét, háromszorosát, valamint ellentettjét!
2a(6;-2) 3a(9;-3) -a(-3;1)

Most használjuk ki a friss tudásunkat és végezzük el a következő műveletet:
2b+3c = ?, ahol b(4;-2) és c(1;3).



Először számoljuk ki a többszörösöket!
2b(8;-4) és 3c(3;9).
Majd a következő lépésben végezzük el az összeadást!
2b+3c(11;5).
Ugye, így jóval egyszerűbb, mint a geometriai módon?!

Gyakorlásképpen nézzünk pár újabb műveletet a már ismert vektorokkal:
a(3;2) b(-1;4) c(0;-3) d(-2;-5)

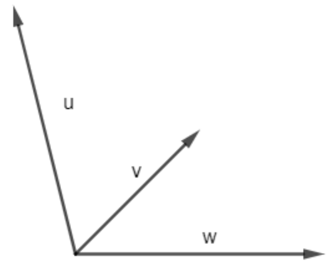
3a+b =? 2c-3d =? -c+3b = ? 3c+2a-b =? ½d-a =?

Alapvető vektorműveletek áttekintése

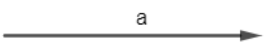
Az első rész itt gyakorlatilag véget ér, mivel megvan a három alapművelet:
- összeadás
- kivonás
- szorzás valós számmal.

Jöjjön pár gyakorló feladat!

1.) Egy hajó a tengeren 3 óráig megy keletre, majd 2 óráig délre. Kérdés: milyen távolra került a kiindulási helyétől, ha óránként 12 km-nyi távolságot tett meg?
2.) Rajzolja le az alábbi három vektor páronkénti összegét! (Paralelogramma-módszer)



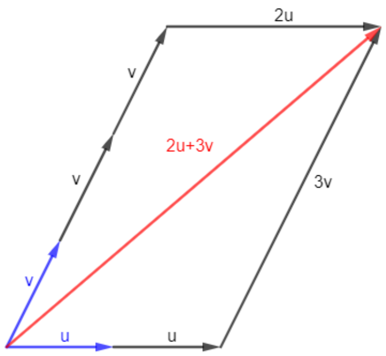
3.) Az előző ábrán lévő vektorok segítségével rajzolja le a következő különbségeket: u-v, illetve v-w.
4.) Rajzolja le az alábbi vektor kétszeresét, háromszorosát, felét, illetve ellentettjét!



5.) Adottak az alábbi pontok a síkban: A(3;2), B(5;1), C(-2;4), D(3;-1). Számolja ki páronként a megfelelő vektorokat!
6.) Adottak az alábbi vektorok: a(3;1), b(5;-2), c(-1;4). Számolja ki az alábbi műveletek eredményeit: a+b, a+2c, b-c, 3a-b, ½ c+3b.

Bázisvektorok, egységvektorok

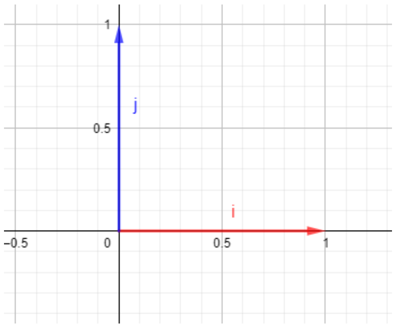
Adott a síkban kettő, nem egyállású vektor. (Magyarul nem párhuzamos és egyik sem null-vektor). Ezzel a két **bázisvektor**ral a sík bármelyik vektorát ki tudjuk fejezni. Az itt látható képen adott egy piros színű vektor, illetve a két kék színű bázisvektor, az u és a v. Amint az a rajzból is látható, a piros vektort a már ismert paralelogramma módszerrel felbonthatjuk a két bázisvektorral párhuzamos összetevőkre; jelen esetben 2*u+3*v formában.



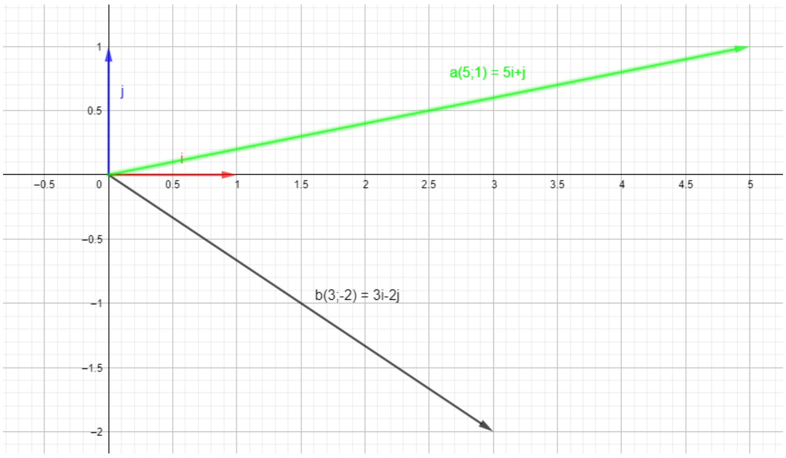
Könnyű belátni, hogy a sík összes vektorát fel lehet bontani ezen kettő bázisvektor megfelelő valós számmal szorzott összetevőire.

Megjegyzés: nem feltétlenül szokott egész szám kijönni, de az egyszerűbb feladatoknál ez elég gyakori.

Hamarosan fontos lesz, hogy milyen bázisvektorok legyenek. Így vezessük be az x tengely mentén az i-t, illetve az y mentén a j-t. Mindkét vektor egységnyi hosszú és egymásra merőleges, így ezek elnevezése: **egységvektorok**.



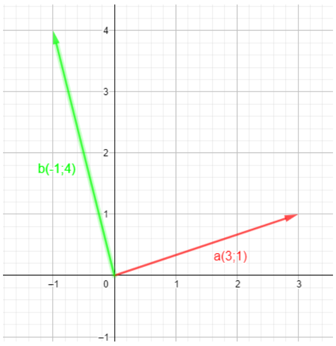
Elsőnek írjuk fel a következő vektorokat egységvektorok segítségével: a(5;1), illetve b(3;-2).



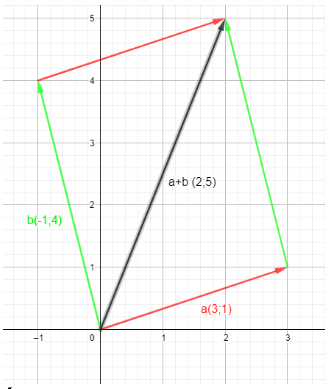
Az a vektor esetén 5-öt haladunk jobbra, azaz 5-ször vesszük az i egységvektort, majd egyet lépünk fel, tehát a j-t egyszer vesszük. Így: a=5i+j.
Hasonlóan: b=3i-2j.

Műveletek egységvektorokkal

Először nézzük a már megismert alapvető műveleteket!
Adottak: a(3;1) és b(-1;4).
Kérdések: a+b, a-b, 2*a, 2a+b, 3*b, 3b-2a.

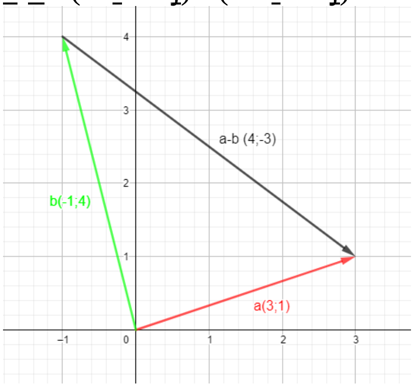


Az első lépésben írjuk át az adott vektorokat egységvektorokra!
a(3;1) => a=3*i+1*j = 3i+j
b(-1;4) => b=-1*i+4*j = -i+4j



Így hajtsuk végre az összeadást (geometriailag, majd algebrailag is!):
a+b = (3*i+1*j)+(-1*i+4*j) = 3*i+1*j + (-1)*i+4*j = …
A megfelelő vektorok átcsoportosításával:
… = 3*i+ (-1)*i +1*j +4*j = 2*i+5*j = 2i+5j => a+b(2;5)

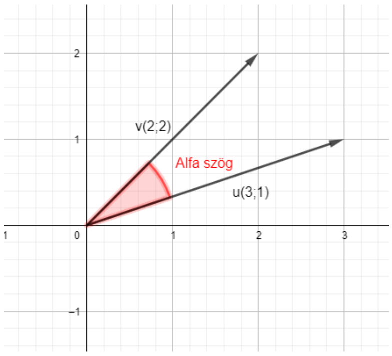
A kivonás immár lehet egyszerűbb is:
a-b= (3*i+1*j) - (-1*i+4*j) = 3*i+1*j - (-1)*i-4*j = 4*i-3*j = 4i-3j



A további műveletek megoldásai:
2*a=2*(3*i+1*j) = 6*i+2*j = 6i+2j
2a+b = 2*(3*i+1*j) + (-1*i+4*j) = 6*i+2*j -1*i+4*j = 5*i+6*j = 5i+6j
3*b = 3*(-1*i+4*j) = -3*i+12*j = -3i+12j
3b-2a = 3*(-1*i+4*j) - 2*(3*i+1*j) = -3*i+12* j-6*i-2*j = -9*i+10*j

Vektorok skaláris szorzata

Ez anyag már túl mutat a hagyományos vektorok 10. év eleji értelmezésén, mivel bele kell venni a trigonometrikus függvényeket is.



Ami a lényeg: vektorokat eddig csak valós számmal szoroztunk, melynek végeredménye vektor lesz. Most szorozzunk össze vektort vektorral, melynek az eredménye valós szám legyen!
Definiáljuk a két vektor szorzatát a következőként:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

A gyakorlatban most:
u·v = 3*2+1*2 = 6+2 = 8
Másik definíció:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$$

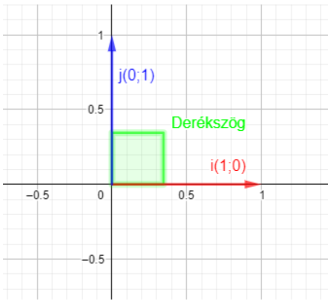
Ehhez meg kell határozni a Pitagorasz-tétel segítségével a két vektor hosszát:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} => |u| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

Hasonlóan: $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} => |v| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}828$
Vegyük észre, hogy a két definíció ugyanarra az eredményre vezet, így ki lehet számolni a két vektor bezárt szögét:
$u_1 * v_1 + u_2 * v_2$ = u·v = |u|·|v|·cos α => 8 = 3,162·2,828·cos α => $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{10}*\sqrt{8}} = \frac{8}{8{,}942} = 0{,}8944$

$$=> \alpha = arc\cos 0{,}8944 = 26{,}57°$$

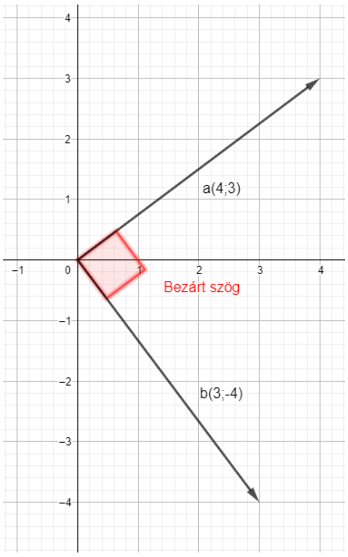
Most nézzünk egy másik megfogalmazást is!



Első lépésként nézzük meg a két egységvektor szorzatát! Tudjuk, hogy: i(1;0) és j(0;1).
A két vektor skaláris szorzata: i·j = 1*0+0*1 = 0+0 = 0.
Mivel mindkét egységvektor hossza 1, így innen is látható, hogy a bezárt szög derékszög, azaz 90°.
Tovább nézzük a vektorok négyzetét: i·i=1*1+0*0 = 1+0 = 1, hasonlóan: $j^2 = 1$.

Most nézzük a fenti két vektort: u(3;1) és v(2;2).
Átírva egységvektorokra: u=3i+j, valamint v=2i+2j.
u·v = (3i+j)·(2i+2j) = 3i·2i+3i·2j+j·2i+j·2j =
= 6*i^2+ 6*ij+2*ij+2*j^2 = 6+0+0+2 = 8

Most nézzünk egy másik példát! a(4;3) és b(3;-4).
Keressük meg a két vektor szögét!

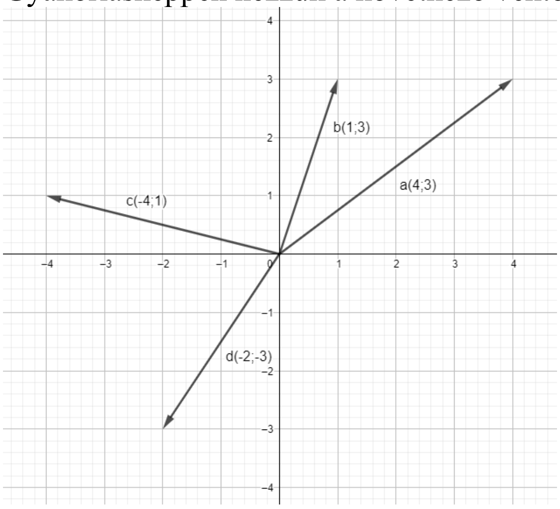


$$|a| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$|b| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

a·b = 4*3+3*(-4) =12+(-12) = 12-12 = 0

a·b = |a|·|b|·cosβ => 0 = 5*5*cosβ => 0=cosβ => Β = 90°.

Gyakorlásképpen nézzük a következő vektorok szögeit:



a(4;3) => $|a| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$
b(1;3) => $|b| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$
c(-4;1) => $|c| = \sqrt{(-4)^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}123$
d(-2;-3) =>
$|d| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$

a·b = 4*1+3*3 = 4+9 = 13
$$\cos(a,b) = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{13}{5*\sqrt{10}} = 0{,}8222$$

(a,b) szöge = 34,69°.

b·c = 1*(-4)+3*1 = -4+3 = -1
$$\cos(b,c) = \frac{bc}{|b|\cdot|c|} = \frac{-1}{\sqrt{10}*\sqrt{17}} = -0{,}0767 => (b,c) szöge = 94{,}40°.$$

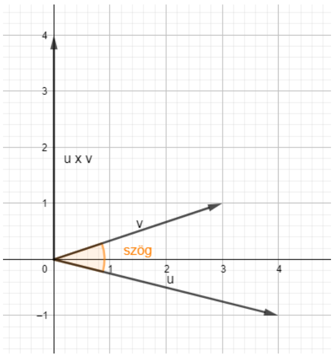
c·d = -4*(-2)+1*(-3) = 8-3 = 5
$$\cos(c,d) = \frac{cd}{|c||d|} = \frac{5}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = 0{,}3363 => (c,d)\ szöge = 70{,}35°.$$

Vektorok vektoriális szorzata

A vektorok skaláris szorzatánál két vektor szorzatából valós számot kaphatunk. Ezzel ellentétben a vektorok vektoriális szorzatából vektor lesz.

A két vektor szorzatának hossza: a két vektor hosszának szorzata, megszorozva a bezárt szög szinuszával. Iránya pedig a két eredeti vektor síkjára vett merőleges.

A három vektor egy jobbsodrású rendszert alkot, azaz az u, a v és a uxv vektorokat a jobb kéz első három ujjával lehet megjeleníteni.



Ennél az ábránál maradva: u(4;-1) és v(3;1).

Hosszukat kiszámítva:

$|u| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$|v| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

u·v = 4*3+(-1)*1 = 12-1 = 11

Bezárt szögük: $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{17} * \sqrt{10}} = 0{,}8437 => \alpha = arc\cos 0{,}8437 = 32{,}47°$

Tehát a vektoriális szorzat hossza: $u\ x\ v = \ |u| \cdot |v| \cdot sin 32{,}47° = 91{,}26$