Másodfokú egyenlet megoldóképlete: levezetés

Ez az egyik leggyakrabban feladott levezetés, de ennek ellenére a 2020-as kiadású OFI-s Matematika 10.-es tankönyvben valahogyan nem szerencsésen van bent, így inkább levezetem és a sok hasonló alkalmazás vagy videó után én is nyilvánosságra hozom. Tehát lássuk:

A másodfokú egyenlet általános alakja a következő:
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, ahol\ a, b, c \epsilon R\ \text{és}\ a \neq 0.$
Fontos kiemelni, hogy ez egy általános megoldóképlet, tehát valamennyi a, b, c valós számra azonnal ad megoldást. Kivéve, ha a=0, mert akkor az egyenlet nem másodfokú lesz.
Első lépésben az egész egyenletet osszuk el a-val:

$$\frac{a}{a} \cdot x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Az első tört 1 lesz, így a tényleges alak: $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$
Most szeretnénk egy teljes másodfokú alakot kihozni az első két tagból, így egy kicsit trükközünk, azaz ugyanazt a tagot hozzáírjuk és elvesszük:

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{(2a)^2}} - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Vegyük észre, hogy az első három tag egy teljes négyzet, azaz:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{c}{a}} = 0$$

Most az utolsó két tagot vonjuk egybe:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a^2} = 0$$

A második tagot vigyük át a jobb oldalra, így:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a^2}$$

Mindkét oldalból vonjunk gyököt (figyelni kell a jobb oldalon az előjelre!):

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a^2}}$$

Végezzük el a gyökvonást a jobb oldalon!

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Végül vonjuk ki mindkét oldalból a bal oldalon feleslegessé vált tagot:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Így megkaptuk a megoldóképletet!
Van viszont pár apróság, amit érdemes (értsd: kötelező) megjegyezni!
Diszkrimináns: a gyök alatti kifejezés. Tehát:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

A diszkrimináns értékére vonatkozó szabályok:

- Ha D>0, akkor az egyenletnek két különböző gyöke van. (Tehát $x_1 \neq x_2$)
- Ha D=0, akkor az egyenletnek két azonos gyöke van (más megfogalmazásban: a két valós gyök azonos), azaz: $x_1=x_2$.
- Ha pedig D<0, akkor az egyenletnek nincsen gyöke, mert a valós számok körében nem lehet negatív szám a gyökjel alatt.

Vegyünk most pár konkrét példát!

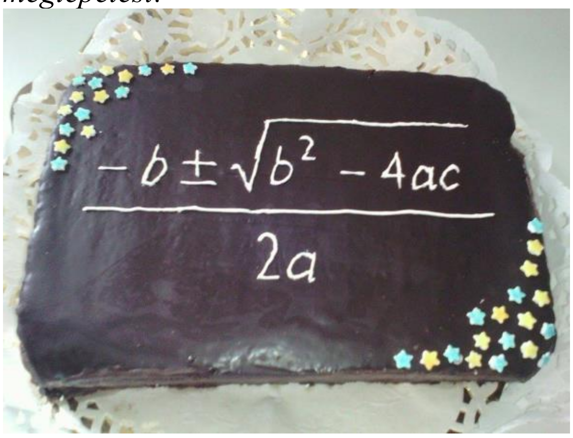
1.) Az egyenlet: $x^2-7x+10=0$
Itt: a=1; b=-7 és c=10.
Behelyettesítve: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1} = \frac{+7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{7\pm3}{2} =>$
Felső megoldás (Azaz plusz-szal): $x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$
Alsó megoldás (Azaz mínusz-szal): $x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

2.) A következő egyenlet: $2x^2+12x+18=0$.
Itt: a=2; b=12 és c=18.
Behelyettesítve: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot2\cdot18}}{2\cdot2} = \frac{-12\pm\sqrt{144-144}}{4} = \frac{-12\pm\sqrt{0}}{4} =>$

$$\frac{-12\pm0}{4} => x_{1,2} = \frac{-12}{4} = -3.$$

3.) Most a következőt oldjuk meg: $-2x^2+6x-24=0$.
Itt az együtthatók: a= -2; b=6 és c=-24.
Behelyettesítve: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-2)\cdot(-24)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-6\pm\sqrt{36-192}}{-4} = \frac{-6\pm\sqrt{-156}}{-4} =>$
Mivel -156<0, ezért nem lehet belőle gyököt vonni, tehát az egyenletnek nincsen valós gyöke! ⇔ $x_{1,2} \notin R$.

Az általános megoldóképlet eléggé elterjedt. Nézzük például az alábbi születésnapi meglepetést:



Tamás Ferenc, 2020.dec.
Megj.: az anyag szabadon terjeszthető!