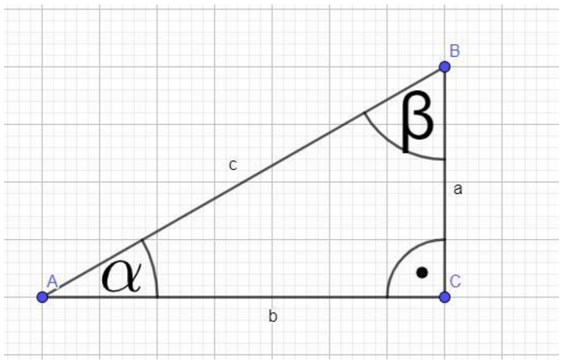
Háromszögek trigonometriája

Alapvető igény, hogy ha ismerjük egy háromszög oldalait, akkor ki tudjuk számolni a szögeit is. Erre valók a háromszög oldalainak és szögeinek összefüggései, azaz a háromszögek trigonometriája. Legegyszerűbb esetben ezt a derékszögű háromszögben nézzük meg!
Elsőként is vegyünk fel egy sima háromszöget!
Most definiáljuk a **négy alapvető szögfüggvény**t: szinusz (sin), koszinusz (cos), tangens (tg) és kotangens (ctg).



Alapvető összefüggések (4 db):

$$\sin\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \frac{a}{b}$$

$$ctg\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \frac{b}{a}$$

Nagyon fontos, hogy nem a szakaszok betűjelét kell megtanulni, hanem a definíció szöveg szerinti kimondását, azaz értelmét!
Hasonlóan nézzük meg a β szög szögfüggvényeit is:

$$\sin\beta = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{a}{c}$$

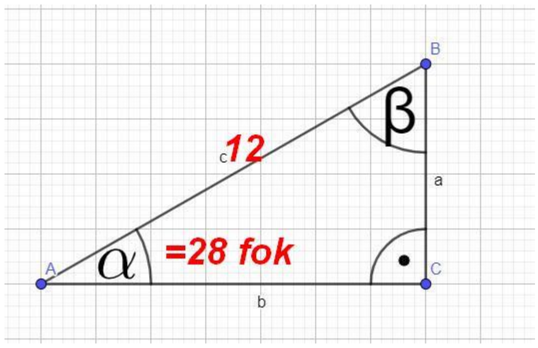
$$tg\ \beta = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \frac{b}{a}$$

$$ctg\beta = \frac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \frac{a}{b}$$

Ezen értelmezés szerint csak a hegyesszögű háromszög szögeinek vannak szögfüggvényei, de hamarosan más szögekhez is rendelhetünk értékeket!

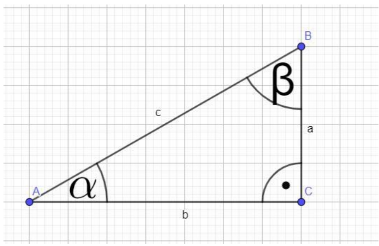
1. **gyakorló feladat**: Egy derékszögű háromszög átfogója 12 cm, míg az egyik hegyesszöge 28°. Mekkora a többi oldal?

Kicsit módosítsunk a fenti ábrán!



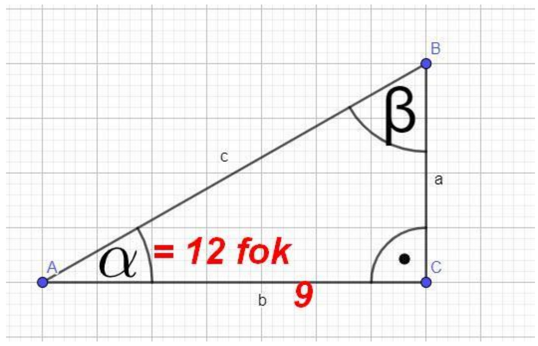
Látható, hogy a szög melletti befogót keressük, amikor megvan az átfogó. Szög melletti befogó és átfogó, ez a koszinusz!
Tehát: cosα = b/c =>
c*cosα=b => b = 12*cos28^o = 12*0,8829
b = 10,5954.
A másik befogót hagyományosan ki lehet számolni Pitagorasz-tétellel is, de most a gyakorlás kedvéért trigonometrikus összefüggéssel számoljuk ki!
Tehát keressük a szöggel szemközti befogót, amikor adott az átfogó! Ez a szinusz lesz! Itt: sin α = a/c => c*sinα = a => a= 12*sin28^o = 12*0,4695 = 5,6337.

2. **gyakorló feladat:** Adott egy derékszögű háromszög két befogója: 3 és 4 cm. Mekkora az átfogó, illetve mekkorák a háromszög szögei?



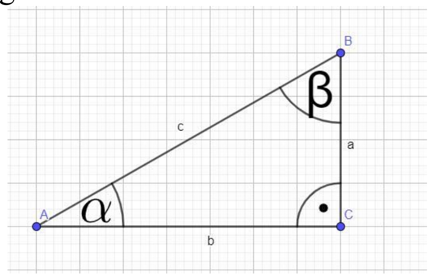
Alapadatok: a= 3 cm és b= 4 cm.
A Pitagorasz-tétel alapján: $c^2= a^2+b^2$ => $c^2=3^2+4^2$ => $c^2=9+16=25$ => c=5 (cm).
Most az α szöget számoljuk ki elsőként: sin α = a/c = 3/5 = 0,6.
A számológépeken van „sin” billentyű és általában egy shift-nek megfelelő gomb (pl.: 2ndF vagy INV) megnyomása után kérhető az inverz művelet.
Matematikai nyelvezettel: α = arc sin 0,6 = 36,8699^o.
Innen már a β szög kiszámolása igen könnyű lesz, hiszen: α+β=90^0. =>
β= 90^0-α = 53,1301^o

3. **gyakorló feladat:** Egy derékszögű háromszög befogója 9 cm és a mellette lévő hegyesszöge 12^0. Mekkora a másik két oldala?



Megint rajzoljuk át az alapábrát!
Tehát először keressük a szöggel szemközti befogót, ha megvan a szög melletti befogó! Ez a tangens lesz! Itt:
tgα = a/b => b*tg α = a =>
a = 9*tg12^0 = 9*0,2126 = 1,9130
Most az átfogó jön! Megint használjunk valamilyen szögfüggvényt!
Például: cosα = b/c => c*cosα = b =>
c= b/cosα = 9/cos 12^0 = 9/0,9781 = 9,2011

A következő részben nézzünk meg néhány alapvető összefüggést!
Megint vegyük elő az eredeti háromszögünket!



Tudjuk, hogy sin α = a/c és cos α = b/c.
A két egyenletet egymással osztva kapjuk a következőt:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = tg\alpha$$

Tehát: $\boldsymbol{tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}$

Hasonlóan: $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} = ctg\alpha$

Tehát: $\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}}$

Az előzőekből már sejthető, hogy a tgα-nak és a ctgα-nak igen sok köze van egymáshoz! Nos, próbáljuk ki a következőt:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Tehát: $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$

A trigonometrikus függvények között négy alapvető összefüggés van. A negyedik előtt be kell vezetni egy újabb jelet. Mivel ezeket a függvényeket és a négyzeteiket is sokat használjuk, ezért a $(\sin\alpha)^2$ helyett inkább a $\sin^2\alpha$-t fogjuk használni!
Hasonlóan értelmezettek: $\cos^2\alpha$, $tg^2\alpha$ és $ctg^2\alpha$ is.
Most már jöhet az a bizonyos negyedik összefüggés:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = (a/c)^2 + \left(b/c\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

Viszont a Pitagorasz-tetel miatt tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, ezért a tört számlálója és nevezője egyenlő!

Tehát: $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$**.**