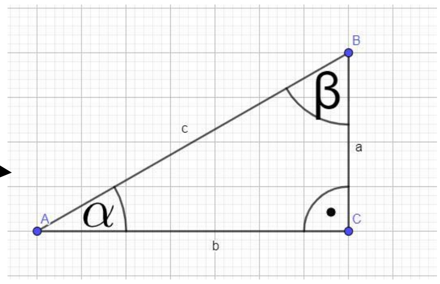
Tamás Ferenc: Egységkör-modell

A trigonometriában a négy alapvető szögfüggvényt először csak derékszögű háromszögben értelmezzük. Most viszont eljött az ideje annak, hogy ezt az értelmezést kiterjesszük minden szögre!
Ismétlésként elevenítsük fel a klasszikus ábrát!



Itt a négy alapvető szögfüggvény a következő:

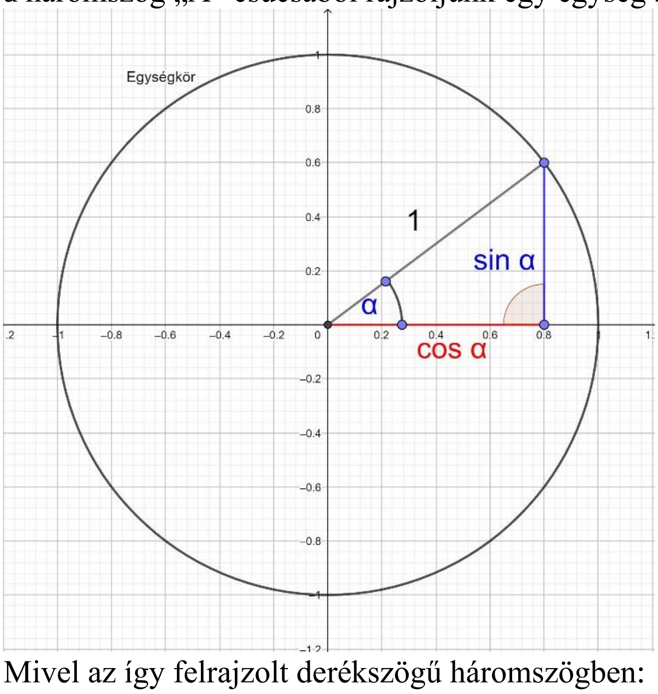
$$\sin\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \frac{a}{b}$$

$$ctg\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \frac{b}{a}$$

Terjesszük ki ezt az értelmezést oly módon, hogy az átfogó legyen egységnyi! (c=1) Ráadásul a háromszög „A” csúcsából rajzoljunk egy egység sugarú kört. Íme az ábra:



Mivel az így felrajzolt derékszögű háromszögben:

$$\sin\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó} = \frac{kék\ befogó}{átfogó = 1} = kék\ befogó$$

Tehát sinα = kék befogó.

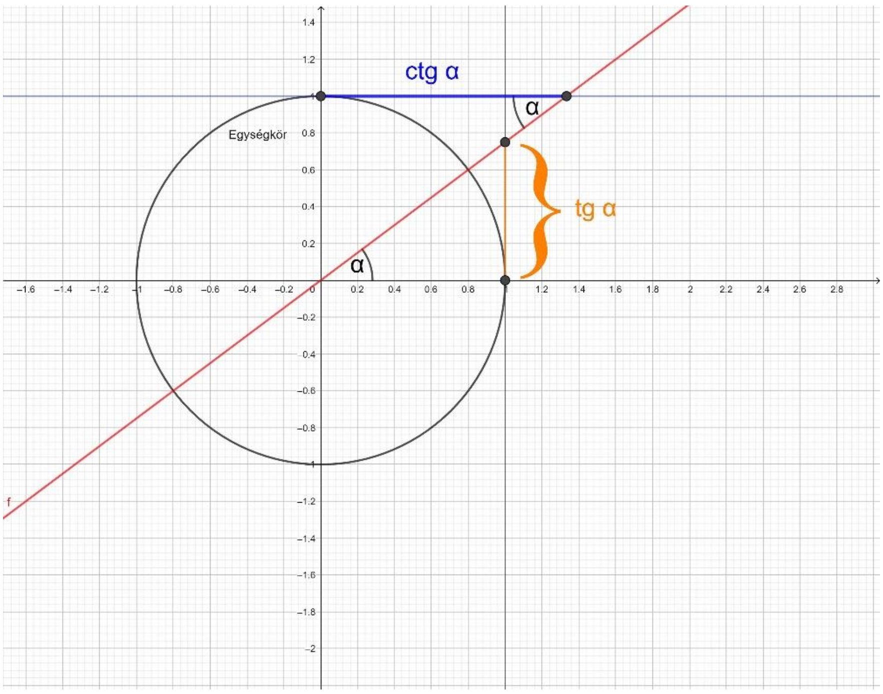
Hasonlóan nézzük meg az α melletti (piros) befogót is! Itt:

$$cos\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{átfogó} = \frac{piros\ befogó}{átfogó = 1} = piros\ befogó$$

Tehát cosα = piros befogó.

A modell további lényeges eleme ez, hogy ezek az értelmezések nem csupán az I. síknegyedben (tehát 0 és 90 fok között), hanem bárhol érvényesek! Így már látható, hogy mindkét szögfüggvény eredménye lehet 0, sőt negatív is!
Viszont az is látható, hogy csak -1 és +1 között lehetnek a felvett értékek! Kicsit precízebb matematikai fogalmazással:
$-1 \leq sin\alpha \leq +1$, valamint: $-1 \leq cos\alpha \leq +1$.

Most nézzük meg a másik két szögfüggvény értelmezését is!
Újra induljunk ki a jól ismert ábrából, de most hosszabbítsuk meg a sugarat a körön kívül és az x=+1-nél, valamint az y=+1-nél rajzoljunk meg egy-egy érintőt!



Mivel definíció szerint:

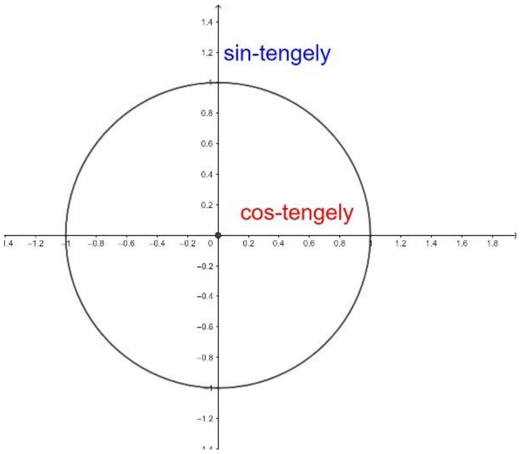
$$tg\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó} = \frac{narancssárga\ szakasz}{kör\ sugara = 1} \ =>$$

$tg\alpha = narancssárga\ szakasz.$
Tehát a szög tangense az x=1 érintőn lévő metszet hossza!
Hasonlóan nézzük meg a cotangenst is! Mivel a rajzon látható két α szög egyenlő, ezért a fenti háromszögre felírva:

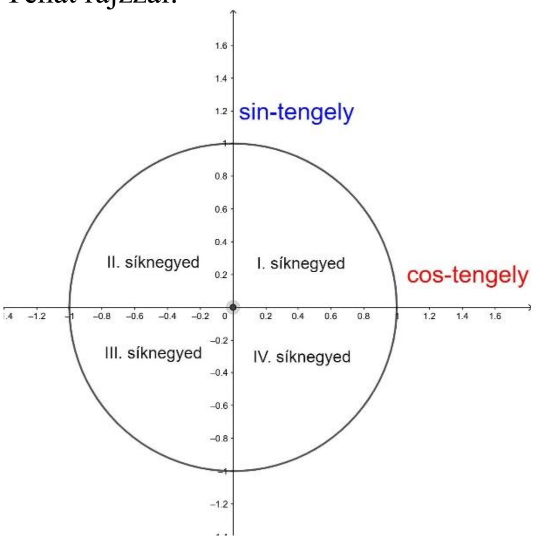
$$ctg\alpha = \frac{szög\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó} = \frac{kék\ szakasz}{kör\ sugara = 1} \ =>$$

$ctg\alpha = kék\ szakasz.$
Tehát a párjához hasonlóan az α szög kotangense az y=1 érintőn lévő metszet hossza!

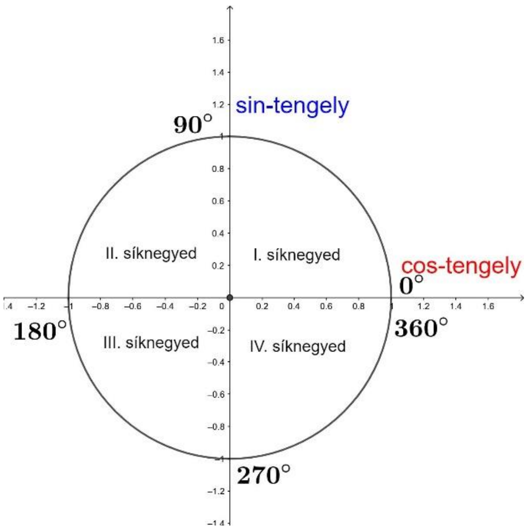
Mivel a vízszintes (x) tengelyen értelmezzük a koszinuszt, ezért ezt sokszor koszinusz-tengelynek is hívjuk, míg a függőleges (y) tengelyen értelmezett szinusz miatt ezt a tengelyt szinusz-tengelynek is szoktuk hívni.



Vegyük észre, hogy az egyes szögfüggvények előjeleit is meghatározza ez a rajz. Mivel a cos-tengelyre rajzol nyíl a pozitív számok felé (azaz jobbra) mutat, ezért a koszinusz értékek jobb oldalon lesznek pozitívak, míg bal oldalon negatívak.
Hasonlóan mivel a sin-tengelyen a felfelé mutató nyíl jelöli a pozitív számok irányát, ezért felfelé lesz a sin értéke pozitív, míg lefelé negatív.
Mostantól elég sokszor beszélünk az egyes (koordináta-tengelyek által határolt) síknegyedekről, ezért itt az ideje, hogy el is nevezzük azokat! Az óramutató járásával ellentétesen a nevük legyen I., II., III., és IV síknegyed. (Így, római számokkal jelölve.)
Tehát rajzzal:

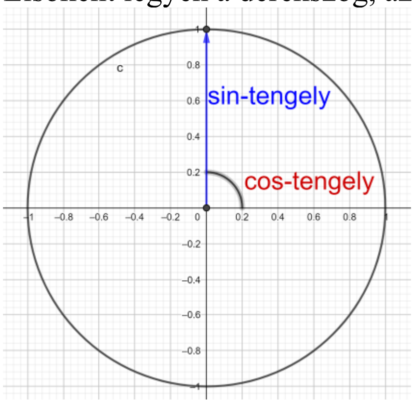


Mivel innentől sokat fogjuk használni a fokokat is, ezért célszerű a tengelyekre ráírni a megfelelő fokokat is. Az „x” tengelyen lesz a 0°, majd az óramutató járásával ellentétes irányban növekszik tovább. Így az I. síknegyed határát az „y” tengely jelenti, ami a 90°.
Mindez ábrával:



A rajzon látható, hogy a teljes szög (360°) egybeesik a 0°-kal, mivel mindkettőt szoktuk használni.
Így a rajz alapján láthatjuk, hogy az I. síknegyedben: sinα, cosα, tgα és ctgα >0. (Ismétlésképpen: ez felel meg a hagyományos derékszögű háromszögben értelmezett szögfüggvényeknek.)
A II. síknegyedben: sinα>0, cosα<0, tgα és ctgα<0.
A III. síknegyedben: sinα, cosα <0 és tgα és ctgα >0.
Végül a IV. síknegyedben: sinα<0, cosα>0, tgα és ctgα<0.

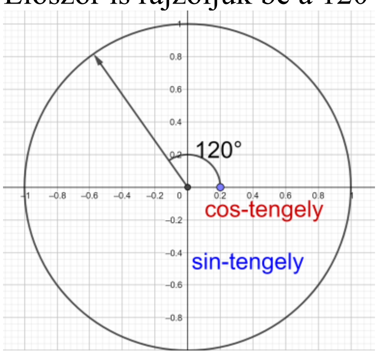
Most nézzük meg gyakorlásul pár nevezetes szög értékeit!
Elsőként legyen a derékszög, azaz 90°.



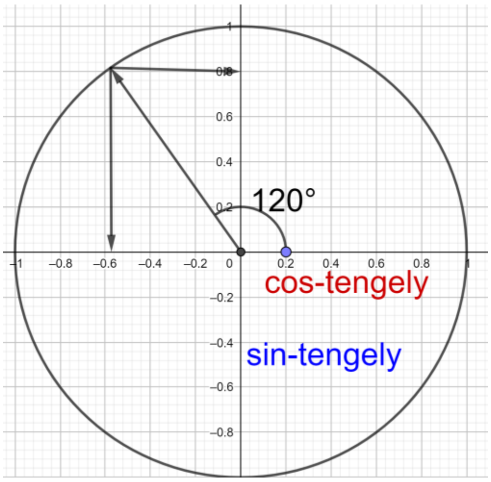
Az Origóból kiinduló és a (0;1)-be tartó (kék) vektor mutatja a 90°-os szöget. A függőleges (sin-) tengelyen 1-et mozdultunk el, tehát: **sin 90°=1**; míg a vízszintes (cos-) tengelyen nem mentünk el a kiinduló ponttól, tehát: **cos 90°=0**.
Mivel a tangens érintője az x=1 egyenes, ezért látható, hogy a most behúzott (kék) vektor ezzel párhuzamos lesz, tehát: **tg 90° nem lesz valós szám.**
Mivel a kotangens érintője az y=1 egyenes lesz és a megadott (kék) vektor ezt éppen a 0 pontban metszi, ezért: **ctg 90° =0**.

Gyakorlás:
Adjuk meg a következő szögfüggvények értékeit:
sin 180°=?; cos 180°=?; tg 180°=?; ctg 180°=?
sin 270°=?; tg 270°=?; cos 360°=?; ctg 360°=?;

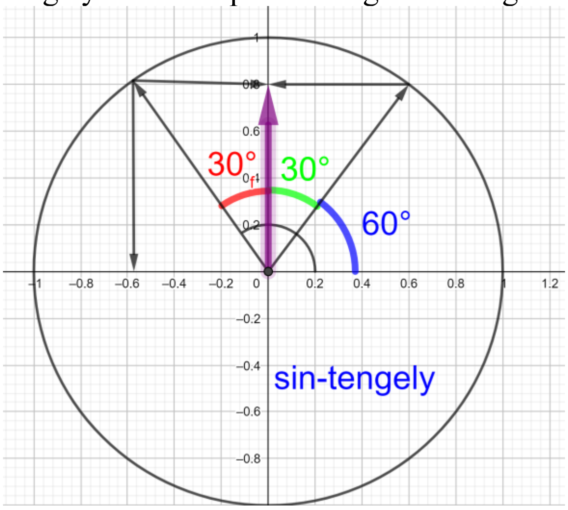
Most egy kicsit nehezebb érték jön, mégpedig a 120°.
Először is rajzoljuk be a 120°-ot a megszokott koordináta-rendszerünkbe!



A szögfüggvények megfelelő értékeit a tengelyeken vesszük fel, ezért a vektor végpontját merőlegesen le kell vetíteni a megfelelő tengelyekre! Tehát:

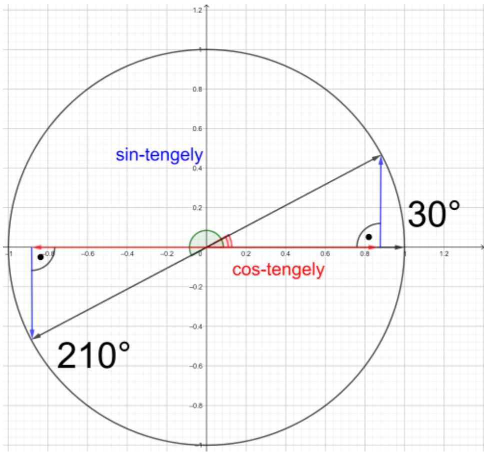


Látható, hogy a sin-érték pozitív lesz, míg a cos-érték negatív. Ahhoz, hogy ez konkrétan mennyi egy kis „trükközés" szükséges. Először is készítsük el az y tengelyre mutató vektor tengelyes tükörképét – a megfelelő szögek beírásával!



A fenti rajzon is látható, hogy a 90° utáni 30 fokot (piros szín) visszatükrözve kapjuk meg a zöld színnel jelölt 30 fokot. Így viszont az eredeti 120 fokból csak 60 maradt, amit kék színnel van jelölve. Mivel a tengelyes tükrözést használtuk, ezért az y tengelytől balra és jobbra lévő két derékszögű háromszög egybevágó, ráadásul van közös oldaluk, amit a rajzon lilával jelöltem. Így már belátható, hogy sin 120° = sin 60°, ami: $\sqrt{3}/2$.
Hasonlóan: cos 120°= - cos 60°= - 1/2. (Segítségképpen: a 120 fok a cos-tengelyen balra van, tehát negatív irányba, míg a 60 fok jobbra van, azaz pozitív irányba!)

Következzenek a 210^0 megfelelő szögfüggvényei!
Rajzoljuk meg a megszokott kört, de most 210° legyen benne!

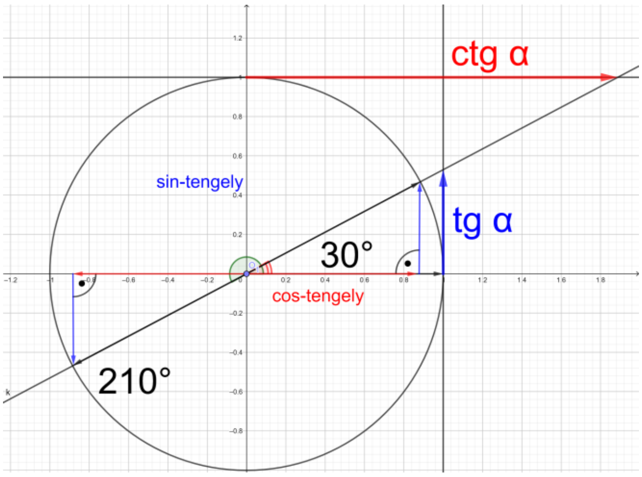


Vegyük észre, hogy a 210 foknál lévő, 180^o utáni kis háromszög egybevágó a 0^o után azonnal következő kis 30^o-os háromszöggel, így a megfelelő oldalait is egyenlőek. Tehát a cos-tengelyen lévő két (piros) szakasz egyenlő, de ellentétes előjelű, valamint a sin-tengelyen lévő két kis (kék) befogó is egyenlő. Tehát:

sin 210^0= - sin 30^o= - ½

Valamint: $\cos 210° = -\cos 30° = -\sqrt{3}/_2$

Most hosszabbítsuk meg az eddigi egységvektort a két érintőig, így megkapjuk a tg30^o és ctg30^o értékét!



Vegyük észre, hogy (a kékkel ábrázolt):

$tg\ 210° = tg 30° = \sqrt{3}/_3$, mivel a 210^o és a 30^o ugyanaz a metsző.

Hasonlóan (a pirossal ábrázolt): $ctg\ 210° = ctg 30° = \sqrt{3}$.

Gyakorlás:

Adjuk meg a következő szögfüggvények értékeit:

sin 150^o=?; cos 150^o=?; tg 150^o=?; ctg 150^o=?

sin 225^o=?; cos 225^o=?; tg 225^o=?; ctg 225^o=?

sin 330^o=?; cos 330^o=?; tg 330^o=?; ctg 330^o=?

Tamás Ferenc, 2020.ápr.